Funciones Continuas

Se dice que una funcion f es **continua** en el numero a si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes

1. $f(a)$ existe

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Funciones Continuas

Ejemplo 1.

Dadas las funciones

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3} \qquad g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-6}{x-3} & \text{si } x\neq 3\\ 3 & \text{si } x=3\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-6}{x-3} & \text{si } x\neq 3\\ 5 & \text{si } x=3\end{cases}$$

- Construya el grafico de cada una de ellas
- Analice su continuidad en *x=3*

Funciones Continuas

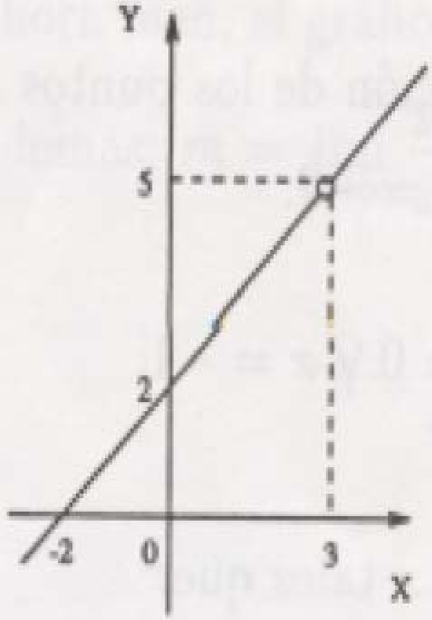


Gráfico de $f(x)$

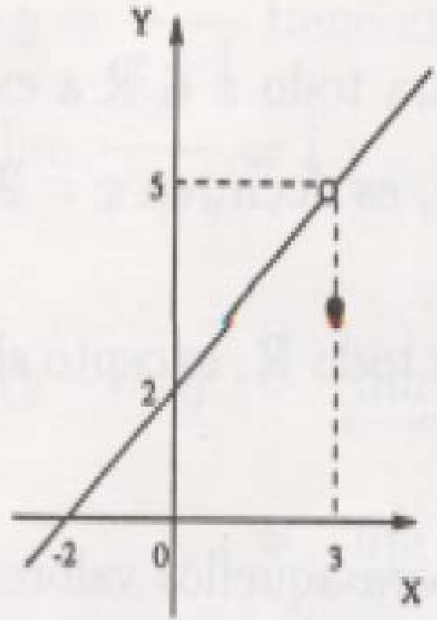


Gráfico de $g(x)$

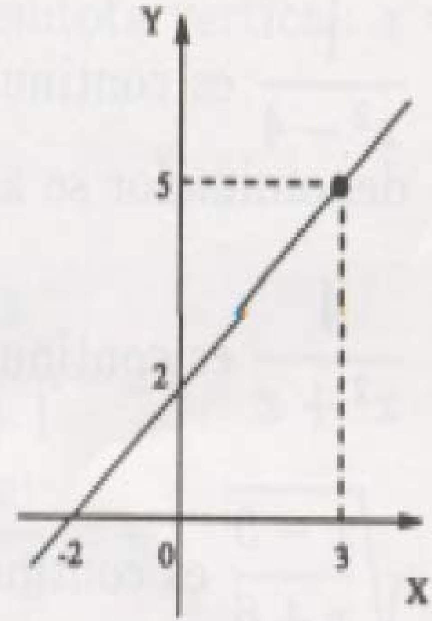


Gráfico de $h(x)$

Funciones Continuas

- Teorema.

Si f y g son dos funciones continuas en el número a, entonces

(i) $f + g$ es continua en a;
(ii) $f - g$ es continua en a;
(iii) $f \cdot g$ es continua en a;
(iv) f/g es continua en a, considerando que $g(a) \neq 0$.

Funciones Continuas

Teorema

- Una función polinomial es continua en todo su dominio.
- Una función racional es continua en todo su dominio

Si n es un número entero positivo y

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

entonces

(i) si n es impar, entonces f es continua en todo número,
(ii) si n es par, entonces f es continua en todo número positivo.

Funciones Continuas

Ejemplo 2. Determine el conjunto de números en los que las siguientes funciones son continuas.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$$

$$g(x) = \frac{4}{x^2+x}$$

Funciones Continuas

Teorema

Si $\lim_{x \to a} g(x) = b$ y si la función f es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

Funciones Continuas

Teorema

Si la función g es continua en a y la función f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en a.

Ejemplo 3. Determinar los números en los que la siguientes funciones son continuas.

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2} \qquad j(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x+6}}$$

Funciones Continuas

Definición

Se dice que una función es **continua en un intervalo abierto** si y sólo si es continua en cada número del intervalo abierto.

Definición

Se dice que la función f es **continua por la derecha en el número a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Funciones Continuas

Definición

Se dice que la función f es **continua por la izquierda en el número a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Definición

Se dice que una función, cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$, es **continua en el intervalo cerrado $[a, b]$** si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b), así como continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Funciones Continuas

Ejemplo 4.

Verifique que la función *h* del ejemplo 3 es continua en el intervalo [-2,2]

Ejemplo 5.

Mostrar que la siguiente función es continua por la derecha en 0, pero no continua por la izquierda en 0. Además es continua en [0,2], pero no lo es en *x=0*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Definición

(i) Una función cuyo dominio incluye al intervalo semiabierto $[a, b)$ es **continua en** $[a, b)$ si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) y es continua por la derecha en a.

(ii) Una función cuyo dominio incluye al intervalo semiabierto $(a, b]$ es **continua en** $(a, b]$ si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) y es continua por la izquierda en b.

Ejemplo 6.

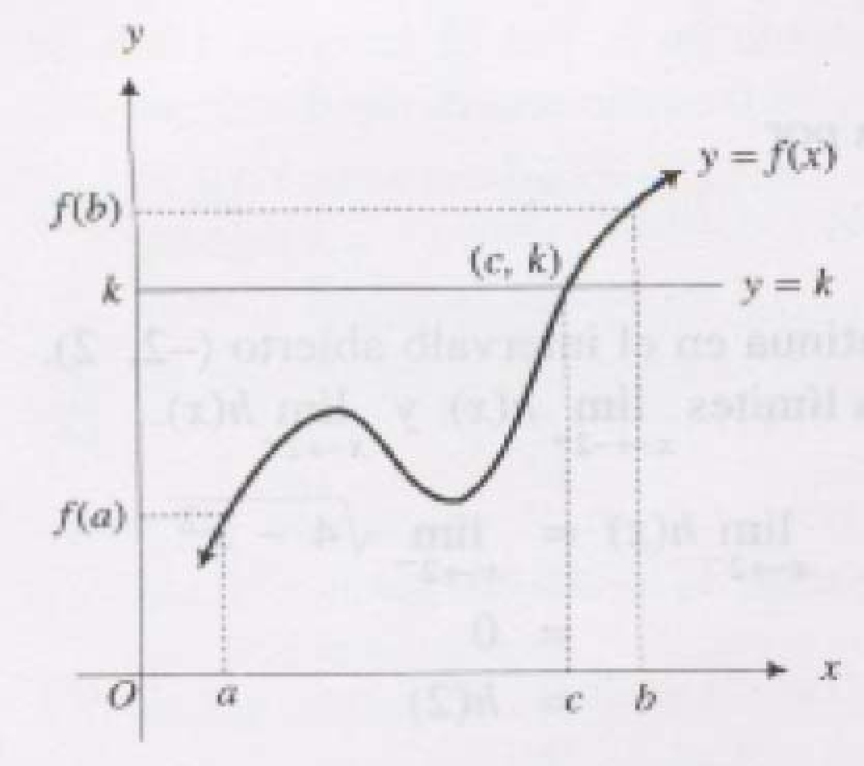
Determine el intervalo mas grande o unión de intervalos en el que la siguiente función es continua.

$$f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x-3}$$

Funciones Continuas

Teorema del valor intermedio

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor k entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b tal que $f(c) = k$.



Funciones Continuas

Teorema.

Las funciones seno y coseno son continuas en todo numero real.

Teorema.

Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son continuas en los dominios respectivos.

Ejemplo 7. Determine los conjuntos en los que las siguientes funciones son continuas.

$$k(x) = x^2 \sin x + x^3 + 1 \qquad m(x) = \frac{2\tan^2 x}{x^2}$$